

Module 2 - Variables aléatoires à une dimension

Département de mathématiques et de statistique



UNIVERSITÉ
LAVAL

Introduction

Exemple 1

Le résultat d'une expérience aléatoire est souvent un nombre réel, ou encore on assigne une valeur réelle aux résultats possibles d'une expérience.

Exemple 1

Le résultat d'une expérience aléatoire est souvent un nombre réel, ou encore on assigne une valeur réelle aux résultats possibles d'une expérience.

$\mathcal{E}$: On tire une pièce de monnaie 2 fois
 $S = \{FF, FP, PF, PP\}$.

Exemple de valeur associée à chaque résultat : le nombre de fois où Pile apparaît.
On peut noter cette variable X .

$X = 0$ si le résultat est FF,

$X = 1$ si le résultat est FP ou PF,

$X = 2$ si le résultat est PP.

Variable aléatoire

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire ayant comme espace échantillonnal S .

Variable aléatoire

- Soit $X : S \rightarrow \mathbb{R}_X$, une fonction qui associe un nombre réel $X(e)$ à chaque élément $e \in S$. Alors on appelle X une **variable aléatoire**.
- $\mathbb{R}_X$ est l'ensemble des valeurs que peut prendre X et est appelé **image de X** ou **support de X** .

Exemple 2

$\mathcal{E}$: on lance un dé régulier et on observe la face du dessus.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On peut définir une infinité de variables aléatoires.

Voici 2 exemples.

Exemple 2

$\mathcal{E}$: on lance un dé régulier et on observe la face du dessus.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On peut définir une infinité de variables aléatoires.

Voici 2 exemples.

- X est la variable aléatoire qui donne le résultat observé.

$$X(e) = e, \forall e \in S$$

$$\mathbb{R}_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Exemple 2

$\mathcal{E}$: on lance un dé régulier et on observe la face du dessus.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On peut définir une infinité de variables aléatoires.

Voici 2 exemples.

- X est la variable aléatoire qui donne le résultat observé.

$$X(e) = e, \forall e \in S$$

$$\mathbb{R}_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Je gagne 50\$ si je roule 4, 5 ou 6.

Je perds 75\$ si je roule 1, 2 ou 3.

Y est la variable aléatoire qui représente mon gain.

$$Y(e) = \begin{cases} -75 & \text{si } e \in \{1, 2, 3\} \\ 50 & \text{si } e \in \{4, 5, 6\} \end{cases}$$

$$\mathbb{R}_Y = \{-75, 50\}.$$

Exemple 2 : probabilités

Quelle est la probabilité que je perde 75 \$ en jouant ?

e	$X(e)$	$Y(e)$	$P(e)$
1			1/6
2			1/6
3			1/6
4			1/6
5			1/6
6			1/6

Événements de S et sous-ensembles de $\mathbb{R}_X$

Pour une variable aléatoire $X : S \rightarrow \mathbb{R}_X$, à tout sous-ensemble de $\mathbb{R}_X$ correspond un sous-ensemble de S . On pourra donc appliquer les règles de calculs de probabilités vues au chapitre 1 aux calculs de probabilités portant sur la valeur de variables aléatoires.

Événements de S et sous-ensembles de $\mathbb{R}_X$

Pour une variable aléatoire $X : S \rightarrow \mathbb{R}_X$, à tout sous-ensemble de $\mathbb{R}_X$ correspond un sous-ensemble de S . On pourra donc appliquer les règles de calculs de probabilités vues au chapitre 1 aux calculs de probabilités portant sur la valeur de variables aléatoires.

Si on prend Y de l'exemple 2, alors $Y \neq -75$ équivaut à l'événement $A = \{4, 5, 6\}$, le complément de l'événement $\bar{A} = \{1, 2, 3\}$. $Y \neq -75$ est donc aussi l'événement $Y = 50$.

Ainsi $P(Y \neq -75) = P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(Y = -75)$.

Fonction de répartition F_X

Description du comportement aléatoire d'une v.a.

Si pour une variable X nous connaissons la valeur de $P(X \leq x)$ pour toute valeur de x , alors nous connaissons complètement le comportement aléatoire de X (on peut calculer la probabilité de n'importe quel événement de $\mathbb{R}_X$).

Fonction de répartition F_X

Soit x , un nombre réel quelconque. La fonction $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, détermine le comportement aléatoire de X .

La fonction F_X est appelée **fonction de répartition** (ou **fonction cumulative de distribution**) de X .

Retour à l'exemple 2

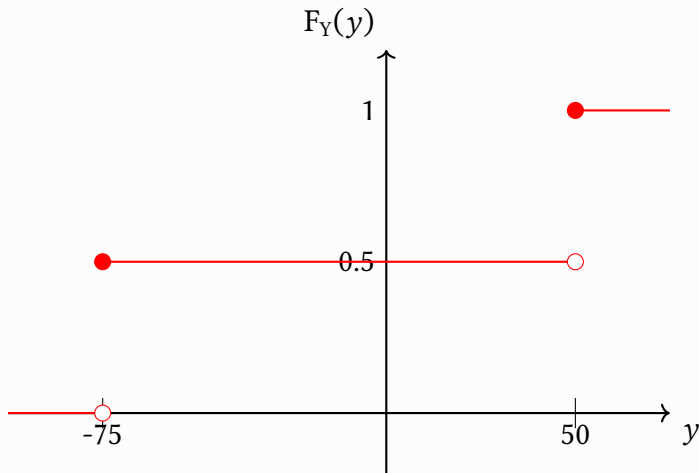
Quelle est la fonction de répartition du gain Y lors du lancer d'un dé équilibré?

On sait que

$$P(Y = -75) = 1/2$$

$$P(Y = 50) = 1/2$$

Retour à l'exemple 2 (suite)



QUIZ!

Dans l'exemple 2, quelle est la probabilité d'obtenir un gain supérieur à 25\$?

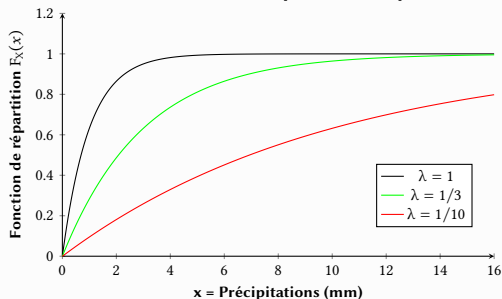
Répondez à l'aide de la fonction de répartition.

Exemple 3

Soit X la quantité de pluie (en mm) reçue à une station météo dans un mois donné. Un modèle possible pour le comportement aléatoire de X est

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

où λ est une constante positive, que l'on suppose connue.



Exemple 3 (suite)

Supposons que $\lambda = 1/10$. Calculez les quantités suivantes.

- $P(X \leq 15)$
- $P(X > 10)$
- $P(5 < X \leq 10)$

Propriétés d'une fonction de répartition

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$
3. F_X est **non décroissante** (si $x_1 \leq x_2$, alors $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$)

Propriétés d'une fonction de répartition

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$
 3. F_X est **non décroissante** (si $x_1 \leq x_2$, alors $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$)
- Pour vérifier si une fonction est une fonction de répartition, on vérifie si elle remplit les 3 propriétés ci-dessus.
 - De la définition d'une fonction de répartition, on a que pour tout $a < b$,
 $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Variables aléatoires discrètes et continues

- Si F_X est une fonction en escalier continue à droite, alors on dit que X est une variable aléatoire **discrète**.
- Si F_X est une fonction continue, alors on dit que X est une variable aléatoire **continue**.

Dans ce cours, nous allons nous concentrer sur les variables aléatoires **continues**.

Fonction de densité f_X

V. a. continues : fonction de densité f_X

Pour une v.a. X continue, F_X est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Fonction de densité f_X

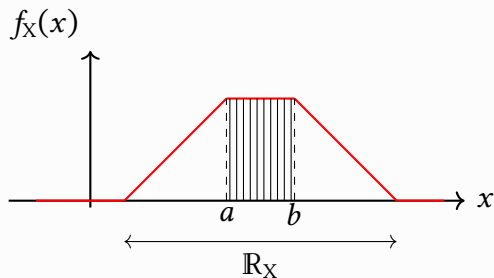
La fonction $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$ est appelée **fonction de densité de probabilité** (ou **fonction de densité**) de X .

Lien entre répartition F_X et densité f_X

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(u) du.$$

Probabilité = aire sous la densité



f_X n'est **pas** une probabilité (elle peut prendre des valeurs supérieures à 1), mais son intégrale sur une région donne la probabilité que X prenne une valeur dans cette région.

Propriétés d'une fonction de densité

1. $f_X(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
3. f_X est continue par morceaux
4. si $x \notin \mathbb{R}_X$, alors $f_X(x) = 0$

Propriétés d'une fonction de densité

1. $f_X(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
3. f_X est continue par morceaux
4. si $x \notin \mathbb{R}_X$, alors $f_X(x) = 0$

Comme $\int_a^a f(u) du = 0$, alors $P(X = a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ dans le cas d'une v.a. continue. Ceci implique que

$$\left. \begin{array}{l} P(a < X < b) \\ P(a < X \leq b) \\ P(a \leq X < b) \\ P(a \leq X \leq b) \end{array} \right\} = \int_a^b f_X(u) du.$$

Exemple 4

Soit une v.a. X continue pouvant prendre toute valeur dans l'intervalle $[0, 20]$. On vous dit que

- tous les intervalles de même longueur dans $[0, 10)$ sont équiprobables,
- tous les intervalles de même longueur dans $[10, 20]$ sont équiprobables,
- un intervalle dans $[10, 20]$ est deux fois plus probable qu'un intervalle de même longueur dans $[0, 10)$.

Déterminez la densité de X , sa fonction de répartition, et évaluez $P(5 < X < 12)$.

Exemple 4(suite)

Exemple 5 : retour à l'exemple de la pluie

La distribution de la quantité de pluie mensuelle reçue à la station est définie par $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$, et 0 ailleurs.

- Quelle est la densité de X ?
- Quelle est la probabilité que la quantité de pluie reçue excède 5 mm?

Exemple 5 (suite)

- Quelle est la probabilité de recevoir entre 10 et 15 mm sachant que l'on recevra au moins 5 mm ?

Remarque

La notation «rigoureuse» est F_X et f_X pour les fonctions de répartition et de densité de la variable aléatoire X . Par contre, pour simplifier l'écriture, lorsqu'il est question d'une seule variable aléatoire, on omet l'indice et on écrit F et f .

Espérance et variance d'une variable aléatoire

Aspects importants d'une distribution

F ou f spécifie complètement la distribution de la variable aléatoire X .

Il est utile de s'intéresser aux caractéristiques qui résument les aspects principaux de son comportement.

- tendance centrale
- dispersion
- forme

Mesure de la tendance centrale

Espérance de X

L'**espérance** (moyenne théorique) d'une v.a. X est donnée par

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

C'est la valeur moyenne que l'on obtiendrait si on réalisait l'expérience aléatoire une infinité de fois (donc si on obtenait une infinité de valeurs de X réparties selon F).

Exemple 6 : retour à l'exemple de la pluie

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Quelle quantité de pluie tombe-t-il en moyenne durant ce mois ? (Répondez pour λ en général, sans fixer de valeur).

Variabilité d'une variable aléatoire

Deux variables aléatoires peuvent avoir la même espérance, mais l'une peut être plus variable que l'autre, i.e., à avoir tendance à prendre des valeurs plus éloignées de sa moyenne que l'autre.

Exemple : Nous avons deux sacs. Dans le premier, il y a dix boules numérotées de 1 à 10 et dans le deuxième, il y a deux boules numérotées 5 et 6.

L'expérience consiste à piger une boule dans chaque sac.

X = la valeur indiquée par la boule du premier sac

Y = la valeur indiquée par la boule du deuxième sac.

On peut montrer que X et Y ont la même espérance (5, 5).

Cependant, on voit très bien que les résultats de X seront plus variables.

Variabilité d'une variable aléatoire

Voici 10 réalisations de l'expérience :

	X	Y
[1,]	4	6
[2,]	9	5
[3,]	6	5
[4,]	3	6
[5,]	5	5
[6,]	9	6
[7,]	1	6
[8,]	6	5
[9,]	7	6
[10,]	2	5

Mesure de dispersion d'une distribution

Variance et écart-type

- La **variance** d'une variable X (ou de la distribution de X) est donnée par

$$V(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

- L'**écart-type** de X est $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Exemple 7 : retour à l'exemple de la pluie

La quantité de pluie reçue en un mois à cette station est-elle très variable ?

Espérance d'une fonction de variable aléatoire

Valeur espérée d'une fonction de X

Espérance d'une fonction de X

Soit X une v.a. et posons $Y = H(X)$ une fonction de X. Alors l'**espérance mathématique de $H(X)$** (ou de Y) est définie par

$$E[Y] = E[H(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x) dx.$$

Un cas particulier...

- $H(X) = (X - \mu)^2 \Rightarrow E[(X - \mu)^2] = V[X] = \sigma^2 = \text{variance de X.}$

Résultats utiles

Supposons que a et b sont des constantes.

- $E[aX + b] = aE[X] + b$

- $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

- $V[aX + b] = a^2V[X]$

Exemple 8 : retour à l'exemple de la pluie

Supposons que les revenus (en centaines de milliers de dollars) générés par un barrage sont bien modélisés par l'équation $R = 10 + 3X$ (où X est la quantité de pluie). Quelle est la valeur moyenne et l'écart-type de ces revenus ?

Rappel : $E(X) = 1/\lambda$ $V(X) = 1/\lambda^2$

Réponses aux exemples

1. (pas de question)

$$2. P(Y = -75) = 1/2, F(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -75 \\ 1/2 & \text{si } -75 \leq y < 50 \\ 1 & \text{si } y \geq 50 \end{cases}$$

$$3. P(X \leq 15) \approx 0,777, \quad P(X > 10) \approx 0,368, \quad P(5 < X \leq 10) \approx 0,239$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 1/30 & \text{si } 0 \leq x < 10 \\ 2/30 & \text{si } 10 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/30 & \text{si } 0 \leq x < 10 \\ (2x - 10)/30 & \text{si } 10 \leq x \leq 20 \\ 1 & \text{si } x > 20 \end{cases}$$

$$P(5 < X < 12) = F(12) - F(5) = \int_5^{10} \frac{1}{30} dx + \int_{10}^{12} \frac{2}{30} dx = \text{aire des rectangles}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, P(X > 5) = e^{-5\lambda}, P(10 \leq X \leq 15 | X \geq 5) = \frac{e^{-10\lambda} - e^{-15\lambda}}{e^{-5\lambda}}$$

$$6. E(X) = 1/\lambda$$

$$7. V(X) = 1/\lambda^2$$

$$8. E(R) = 10 + 3/\lambda, \quad \sigma = 3/\lambda$$